BAĞINTI, FONSİYON, İŞLEM

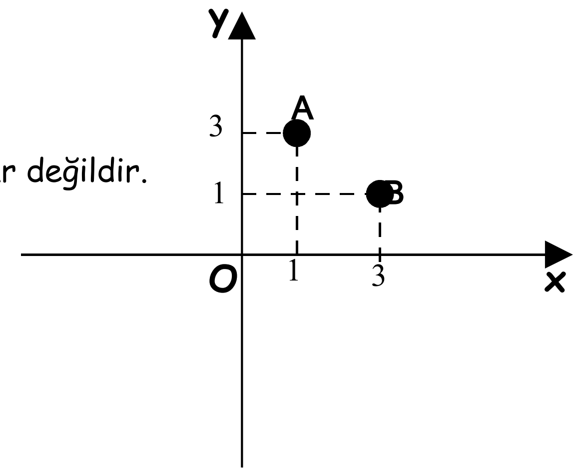
SIRALI İKİLİ :

a ve b elemanlarının belirttiği (a , b) şeklindeki ikiliye sıralı ikili denir. Sıralı ikili denilmesindeki sebep bileşenlerin yeri değiştiğinde ikilinin değişmesindendir.

Yani : (a , b) ≠ (b , a) dir.

Örnek :

A(1 , 3) noktası ile B(3 , 1) noktası eşit noktalar değildir.



Noktalar kümesinin elemanları sıralı ikililerdir.

Sıralı ikililerin bileşenleri **birinci** bileşen, **ikinci** bileşen olarak adlandırılır.

(a , b)

ikinci bileşen

birinci bileşen

Sıralı İkililerin Eşitliği :

Sıralı ikililerin eşitliği için birinci ve ikinci bileşenler birbirine eşit olmalıdır.

Yani (x , y) = (a , b) ise x = a ve y = b

ÖRNEK :

(x + 3 , y – 1) = (6 , 4) ise x ve y sayıları kaçtır?

Çözüm :

Sıralı ikililerin eşitliği için birinci ve ikinci bileşenler birbirine eşit olmalıdır.

(x + 3 , y – 1) = (6 , 4)

Yani x +3 = 6 y – 1 = 4

x = 6 – 3 y = 4 + 1

x = 3 ve y = 5 bulunur.

ALIŞTIRMALAR 1 :

1. (x + 3 , y + 1) = (1 , 2) ise x = ? ve y = ?
2. (2x , y - 5) = (8 , -3) ise x = ? ve y = ?
3. (x/2 , 3y) = (6 , 0) ise x = ? ve y = ?
4. (2x + 1 , 4) = (7 , y - 2) ise x = ? ve y = ?

KARTEZYEN ÇARPIM

A ve B herhangi iki küme olsun. Birinci bileşeni A' dan, ikinci bileşeni B' den alınarak oluşturulabilecek tüm sıralı ikililerin kümesine, A ile B' nin kartezyen çarpımı denir ve **A x B** biçiminde gösterilir. Buna göre;

$\boxed{A \times B = \{ (x,y) : x \in A \text{ ve } y \in B \}}$ şeklinde gösterilir.

ÖRNEK : Aynı futbol takımında oynayan Ali, Sertaç ve Tamer, 7, 10 ve 11 numaralı formaları giyebilirler. Bu oyuncuların seçebilecekleri formaları gösteren sıralı ikilileri yazalım.

ÇÖZÜM : A kümesi A = { Ali , Sertaç , Tamer }

B kümesi B = { 7 , 10 , 11 }

A X B = { (Ali, 7), (Ali, 10), (Ali, 11), (Sertaç,7), (Sertaç,10), (Sertaç,11), (Tamer, 7), (Tamer, 10), (Tamer, 11) }

ÖRNEK : A = {1,2 } , B = {3,a} olduğuna göre A x B ve BxA kümelerini yazınız.

ÇÖZÜM :

AxB = {(1,3), (1,a), (2 ,3), (2 ,a) }

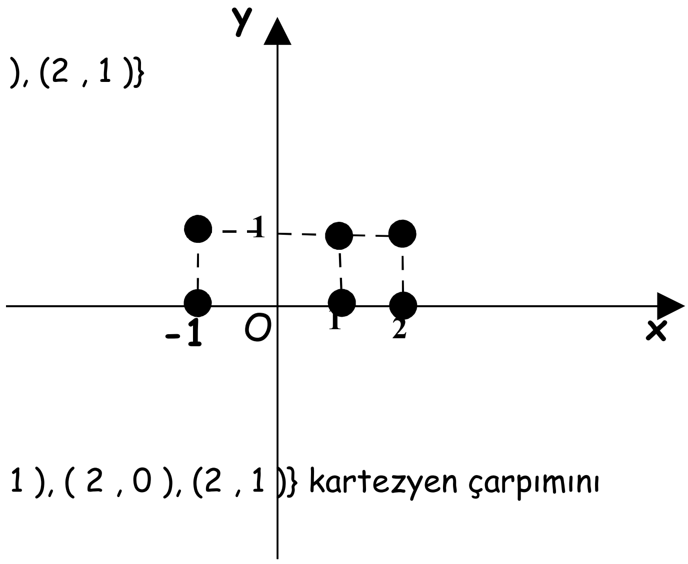
BxA = {(3 ,1), (3,2), (a ,1), (a , 2)}

AxB ≠ BxA

ÖRNEK : A = { -1, 1, 2 } , B = { 0, 1 } olduğuna göre A x B kümesini analitik düzlemde gösteriniz.

ÇÖZÜM :

A X B = { (-1 , 0), (-1 , 1), (1 , 0), (1 , 1), (2 , 0), (2 , 1)}



ÖRNEK : A X B = { (-1 , 0), (-1 , 1), (1 , 0), (1 , 1), (2 , 0), (2 , 1)} kartezyen çarpımını oluşturan A ve B kümelerini yazalım.

ÇÖZÜM : Birinci bileşenler A kümesini ikinci bileşenler B kümesini oluşturur. Tekrar eden eleman küme içine bir kez yazılır.

A kümesi A = { -1, 1 , 2 }

B kümesi B = { 0, 1 }

ÖRNEK : A X B = { (0 , 0), (0 , 1), (0 , 2), (-3 , 0), (-3 , **a**), (-3 , 2)} kartezyen çarpımında **a** ile gösterilen sayı kaçtır?

ÇÖZÜM : 0 ile başlayan sıralı ikililerin ikinci bileşenleri 0, 1, 2 dir. -3 ile başlayan sıralı ikililerin ikinci bileşenleri de 0, 1, 2 olmalıdır. Bu nedenle **a** elemanı 1 olmalıdır.

ALIŞTIRMALAR 2 :

1. A ={ 0, 1, 2 } ve B ={ -2, 2 } ise AXB = ?

2. A ={ -2, 0, 3 } ve B ={ -1, 0, 1 } ise AXB = ?

3. A = { 2, 3, 4, 5) ve B = {6 } ise AXB = ?

4. A = { -1, 1, 2) ve B = { -3, 2, 5 } ise AXB çarpımını analitik düzlemde gösteriniz.

5. A X B = { (A , 2), (A , 5), (B, 2), (B, 5), (C, 2), (C, 5) } ise A ve B kümelerini yazınız.

6. A X B = { (2 , 2), (2 , 5), (2 , 8), (3 , 2), (3 , 5), (3 , 8), (a , 2), (4 ,5),(4 , 8) } kartezyen çarpımında a ile gösterilen sayı kaçtır?

7. A X B = { (-3, -2), (-3, 1), (0, -2), (0, 1), (2, -2), (2, 1) } ise AUB kümesini yazınız.

KARTEZYEN ÇARPIMININ ÖZELLİKLERİ

S(A) ; A kümesinin eleman sayısını göstermektedir.

1) s(AxB) = s(BxA) = s(A).s(B)

2) A≠B ise AxB ≠ BxA değişme özelliği yoktur.

3) (AxB)xC = Ax(BxC) birleşme özelliği vardır .

4) Ax(BUC) = (AxB)U(AxC)

5) Ax(B ∩C) = (AxB) ∩ (AxC)

6) AxA = A^2

ÖRNEKLER

1. A = { 2, 5 } , B= { -1, 1, 3 } ve C = { 0, 4 } ise (AxB)U(AxC) kümesini bulalım.

ÇÖZÜM : (AxB)U(AxC) = Ax(BUC) olduğundan önce BUC kümesini buluruz.

BUC = { -1, 0, 1, 3, 4 }

Ax(BUC) = { (2, -1), (2, 0), (2, 1), (2, 3), (2, 4), (5, -1), (5, 0), (5, 1), (5, 3), (5, 4)}

2. A, B ve C üç kümedir. s(BUC) = 4 ve s[Ax(BUC)] = 32 olduğuna göre A dan A ya kaç tane bağıntı yazılabilir?

ÇÖZÜM : s[Ax(BUC)] = S(A). S(BUC) = 32

S(A). 4 = 32

S(A) = 32:4 = 8

A dan A ya yazılabilecek bağıntı sayısı $2^{8.8} = 2^{64}$ tanedir.

BAĞINTI

A ve B herhangi iki küme olsun. AxB ' nin her alt kümesine , A' dan B' ye bir bağıntı denir.

- AxA ' nın her alt kümesine A' dan A' ya bağıntı ya da A' da bir bağıntı denir.
- s (A) = m , s (B) = n ise A' dan B' ye $2^{m.n}$ tane bağıntı tanımlanır.

ÖRNEK : AxB = {(1,3), (1,a), (2 ,3), (2 ,a) } kartezyen çarpımının 4 tane elemanı vardır.

Bu kümenin alt kümeleri sayısı $2^4 = 16$ 'dır.
O halde A ' dan B ' ye 16 tane bağıntı tanımlanabilir.
Örneğin
$\beta_1 = \{(1,3), (1,a)\}$ ve $\beta_2 = \{(1,a), (2,3), (2,a)\}$ alt kümeleri A dan B ye birer bağıntıdır.

SONUÇ : s(A) = m ve s(B) = n ise A dan B ye tanımlanabilen bağıntı sayısı $2^{m.n}$ tanedir.

ÖRNEKLER

1. Doğal sayılar kümesinde $\beta = \{(x,y) | x + y = 2\}$ bağıntısının sıralı ikililerini yazalım.

ÇÖZÜM : Bağıntı (x , y) şeklinde olan ve x ile y nin toplamı 2 olan sıralı ikilileri yazın diyor.

Bunlar: $\beta = \{(0,2), (1,1), (2,0)\}$ olur

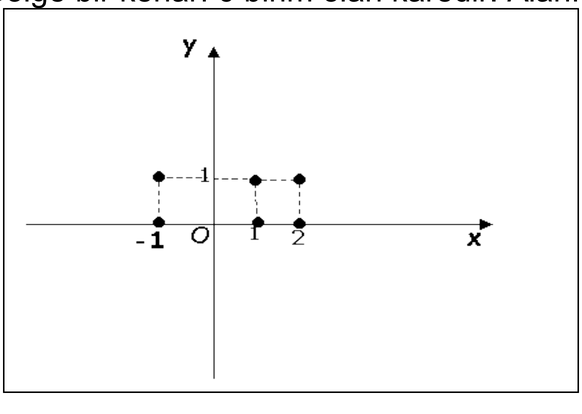
2. Doğal sayılar kümesinde $\beta = \{(x,y) | x > y\}$ bağıntısının sıralı ikililerini yazalım.

ÇÖZÜM : Bağıntı (x , y) şeklinde ve x in y den büyük olduğu sıralı ikilileri yazın diyor.
Bu sıralı ikililerin tümünü yazamayız.

Bu nedenle $\beta = \{(1,0), (2,0), (3,0),\ldots, (2,1), (3,1), (4,1),\ldots,\}$ şeklinde bu bağıntının sıralı ikililerini gösterebiliriz.

3. Reel sayılar kümesinde $\beta = \{(x,y) \mid |x| = 3$ ve $x+2 > y > 0\}$ bağıntısının gösterdiği alan kaç birim karedir?

ÇÖZÜM : $|x| = 3$ demek $x = \pm 3$ demektir.
x = 3 ' ü ikinci eşitsizlikte yerine yazarsak $x + 2 > y > 0$, yani $5 > y > 0$ olur.
x = - 3 ' ü ikinci eşitsizlikte yerine yazarsak $x + 2 > y > 0$, yani $-1 > y > -3$ olur.
Bölge bir kenarı 6 birim olan karedir. Alanı 6x6 = 36 olur.



FONKSİYON

TANIM : f A kümesinden B kümesine bir bağıntı olsun. f bağıntısında A nın istisnasız her elemanı B nin en fazla ve en az bir elemanı ile eşleşiyorsa f bağıntısına fonksiyon denir ve

$f : A \longrightarrow B$ şeklinde gösterilir.

A kümesine tanım kümesi,
B kümesine görüntü kümesi denir.

Tanım kümesinin elemanlarına orijinaller,
görüntü kümesinin elemanlarına görüntüler denir.

Bu yeni terimleri kullanarak fonksiyon olma şartını yeniden yazalım :
A'nın her orjinalinin B içinde *en az ve en fazla* bir tane görüntüsü olacaktır.

ÖRNEK : Aşağıdaki bağıntılardan hangileri A= { 1, 2 , 3 } kümesinden B = { a, b , c , d } ye fonksiyondur?

1. B_1 = {(1, b), (2, a) }

2. B_2 = {(3,b), (1,c), (2,b) }

3. B_3 = {(1,a), (2,a), (3,a) }

4. B_4 = {(1,a), (2,b), (1,c) , (3,c) }

ÇÖZÜM :

1. 1. B_1 = {(1, b), (2, a) }

   A kümesindeki 3' orjinalinin B içinde bir görüntüsü yoktur.
   B_1 fonksiyon değildir.

2. 2. B_2 = { (3, b), (1,c), (2,b) }

   A kümesindeki her orjinalin B içinde bir görüntüsü vardır.
   B_2 fonksiyondur.

3. 3. B_3 = {(1,a), (2,a), (3,a) }

   A kümesindeki her orjinalin B içinde bir görüntüsü vardır.
   B_3 fonksiyondur. Görüntüler eşit olabilir.

4. 4. B_4 = {(1,a), (2,b), (1,c) , (3,c) }

A kümesindeki her orijinalin B içinde yalnız bir tane görüntüsü olacak. Burada 1 orijinali iki tane farklı görüntüye sahiptir.
B_4 fonksiyon değildir.

ÖRNEK : Aşağıda bağıntılardan hangileri bir fonksiyon değildir.

1. İnsanlar kümesinden meslekler kümesine tanımlanan ve her insanı kendi mesleği ile eşleştiren bağıntı fonksiyon mudur?

ÇÖZÜM : Bu bağıntının fonksiyon olması için her insanın en fazla bir ve en az bir tane mesleği olmalıdır. Oysa gerçekte bazı insanların iki mesleği olduğu gibi bazı insanlarında mesleği olmayabilir. Bu bağıntı fonksiyon değildir.

2. Hayvanlar kümesinden yuvalar kümesine tanımlanan ve her hayvanı kendi yuvasıyla eşleştiren bağıntı fonksiyon mudur?
ÇÖZÜM : Bu bağıntının fonksiyon olması için her hayvanın en fazla ve en az bir tane yuvası olmalıdır. Oysa gerçekte bazı hayvanların yuvalarının olmadığını biliyoruz. Bu bağıntı fonksiyon değildir.

3. Çocuklar kümesinden babalar kümesine tanımlanan ve her çocuğu babasıyla eşleştiren bağıntı fonksiyon mudur?
ÇÖZÜM : Bu bağıntının fonksiyon olması için her çocuğun en fazla ve en az bir tane babası olmalıdır. Gerçekte her çocuğun mutlaka bir babası mevcuttur ve bir çocuğun iki babasının olması biyolojik olarak mümkün değildir. Bu bağıntı fonksiyondur.
UNUTMAYIN : Birkaç çocuğun aynı babaya sahip olması fonksiyon olmayı bozmaz.

4. Bir fabrikadaki işçilerle aldıkları ücretleri eşleştiren bağıntı fonksiyon mudur?
ÇÖZÜM : Bu bağıntı da fonksiyondur. Çünkü bedavaya çalışan olmayacağı için her işçinin bir ücreti mutlaka vardır. Hiçbir patron bir işçiye iki ücret vermeyeceğine göre her işçinin en fazla bir tane ücreti vardır. O halde bu bağıntı fonksiyondur.

Fonksiyonlar genellikle yapılan eşlemeyi ifade eden kurallarla verilir.

ÖRNEK : $f : A = \{1, 2, 3\} \rightarrow B$
$f(x) = 2x + 3$
fonksiyonunun sıralı ikililerini yazalım:
Burada tanım kümesinin elemanları (orijinaller) verilmiş fakat görüntüler verilmemiştir.

Fonksiyonun kuralında x yerine orijinalleri yerleştirerek görüntüleri bulacağız.

1 in görüntüsü $f(1) = 2.1 + 3 = 5$

2 nin görüntüsü $f(2) = 2.2 + 3 = 7$

3 ün görüntüsü $f(3) = 2.3 + 3 = 9$

$f = \{ (1,5), (2,7), (1,c) , (3,9) \}$ şeklinde gösterilir.

ÖRNEK : f = { (-4,3), (0,2), (1,5) , (2,-1), (-3,9), (3,2), (-2,-1) } fonksiyonu veriliyor. Aşağıdaki soruları çözelim:

1. Tanım kümesi nedir?
2. Görüntü kümesi nedir?
3. f(2) = ?
4. f(-3) = ?
5. f(5) = ?

ÇÖZÜM :

1. Sıralı ikililerin birinci bileşenleri tanım kümesinin elemanlarını verir.

A = { - 4, -3 , -2 , 0 , 1 , 2 , 3 }

2. Sıralı ikililerin ikinci bileşenleri görüntü kümesinin elemanlarını verir.

B = { -1 , 2 , 3 , 5 , 9 }

3. f(2) = ? sorusu " 2 ' nin görüntüsü kaç demektir"
2 ' nin görüntüsü sıralı ikilide 2 nin karşısındaki sayıdır. f(2) = -1

4. f(-3) = ? sorusu " -3 ' ün görüntüsü kaç demektir"
-3 'ün görüntüsü sıralı ikilide -3 ün karşısındaki sayıdır. f(-3) = 9

5. f(5) = ? sorusu " 5 ' in görüntüsü kaç demektir"
5 'in görüntüsü sıralı ikilide 5 in karşısındaki sayıdır.
Sıralı ikililerin hiç birinde 5 birinci bileşen olarak yer almamıştır. Yani bu fonksiyon 5 için tanımlanmamıştır.
5 in görüntüsü yoktur.

FONKSİYON ÇEŞİTLERİ

SABİT FONKSİYON :
f : A → B fonksiyonunda bütün orijinaller aynı görüntüye sahip ise f ye sabit fonksiyon denir ve her x ϵ A iзin f (x) = b юeklinde gцsterilir.
ÖRNEK :
A = { 2 ,5 ,7 , } olmak üzere
f : A → B

f (x) = 6
fonksiyonu sabit fonksiyondur.
Çünkü f(2) = f(5) = f (7) = 6 ' dır .

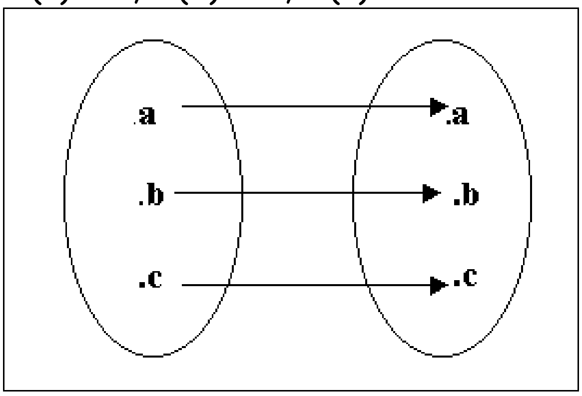
ÖRNEK : Her işçisine aynı ücreti veren bir patronun işçileri ile aldıkları ücretleri eşleştiren fonksiyon sabit fonksiyondur.

BİRİM FONKSİYON

f : A → B
f(x) = x

f fonksiyonuna birim fonksiyon denir .
Yani her elemanın görüntüsü kendisine eşittir .
Birim fonksiyon genellikle I (x) ile gösterilir.

ÖRNEK :
Aşağıda *A* = { a,b ,c } kümesinde şema ile tanımlanan
I : A → A
fonksiyonu birim fonksiyondur
Çünkü : I(x) = x olur.
I (a) = a , I (b) = b , I (c) = c dir .

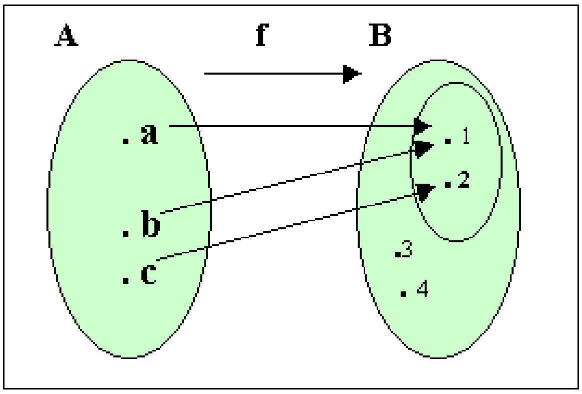


ÖRNEK : Bir kameranın fonksiyonu görüntü almaktır. Kamera ile bir maçı çekersek sonradan seyrettiğimizde kameranın her cismi kendi görüntüsü ile eşleştirdiğini görürüz. Yani hiçbir zaman Ahmet in görüntüsü Mehmet olmaz. Kamera her cismi kendi görüntüsü ile eşleştirir. Kameranın fonksiyonu sabit fonksiyondur.

İÇİNE FONKSİYON

f : A → B fonksiyonunda orijinallere ait görüntüler görüntü (B) kümesinin alt kümesi oluyorsa f , içine fonksiyondur .

ÖRNEK:



Şemada tanım kümesi A = { a , b , c } ve görüntü kümesi B = { 1, 2, 3, 4 } dür.
Orijinallerin görüntülerinden oluşan görüntü kümesi f (A) = { 1, 2 } dir.
{ 1, 2 } C { 1, 2, 3, 4 } olur. f (A) kümesi B ' nin alt kümesidir. Fonksiyon içinedir.
Yani B kümesi A kümesinin görüntüleri ile örtülmezse fonksiyon içine olur.

İŞLEM

Tanım: A boş olmayan bir küme olsun. A X A kümesinden A kümesine tanımlı her fonksiyona, A kümesinde tanımlı ikili işlem ya da A kümesine tanımlı işlem denir.

İşlemi Å , ▾, * gibi sembollerle gösteririz.

Örnek: x ve y Reel sayıları için, x*y = x+y+2xy

işlemi tanımlanıyor. (4,2) sıralı ikilisine karşı gelen sayı kaçtır?

Çözüm:

x*y = x+y+2xy işleminde x = 4 ve y = 2 yazacağız.

4*2 = 4+2+2.4.2 = 24 bulunur.

Burada işlemin tanımına göre 4 ile 2 yi işleme aldığımızda 24 çıkıyor. Bu sonucu daha önce gördüğümüz dört işlemden hiçbirinde bulamayız.

4 + 2 = 8, 4 - 2 = 2, 4.2 = 8, 4:2 = 2

Daha önce öğrendiğimiz dört temel işlemi kullanarak birçok yeni işlemler üretebiliriz. Örneğin

b = a—a^2 + b^2

x▾y = xy - 2x

$x \lozenge y = (x / y) + y^4$

işlemleri bunlardan bazılarıdır.

Neden Farklı İşlemlere Gerek Duyulmuştur?

Örneğin biliyoruz ki bir futbol takımı galibiyete 3, beraberliğe 1 puan almaktadır. Bir futbol takımının puanını

$g \blacktriangledown b = 3g + b$ işlemiyle bulabiliriz.

Bir takım 8 galibiyet, 5 beraberlik almış ise puanı :

$8 \blacktriangledown 5 = 3.8 + 5 = 29$ olur.

Sonuç olarak dört işlem yardımıyla tanımladığımız bu yeni işlemler birkaç hesabı içinde barındırır ve kolaylık sağlar. Sözün özü gelişen teknoloji, artan ihtiyaçlar ve çağımızın sürat çağı olması nedeniyle matematik bu ihtiyaçlara cevap verebilecek işlemleri ve enstrümanları geliştirmektedir.

_____İŞLEMİN ÖZELLİKLERİ________

BİR KÜMENİN BİR İŞLEME GÖRE KAPALILIĞI

$\lozenge$ işlemi boş olmayan bir A kümesinde tanımlı bir işlem olsun. A ' nın her x ve y elemanı için , $x \lozenge y$ işleminin sonucu daima A kümesinin bir elemanı olursa A kümesi $\lozenge$ işlemine göre kapalıdır denir.

Örnek; x ve y iki tamsayıdır. * işlemi $x*y = x^x+3y$ olarak tanımlanıyor. * işlemi tamsayılar kümesinde kapalımıdır?

Çözüm; * işleminin kapalı olması için tam sayılar kümesinden bütün elemanları işleme aldığımızda sonuçların tümü tamsayı olmalıdır.

İşlemi iki parçada düşünelim: $x*y = x^x+3y$

Herhangi iki x ve y tamsayısı alalım.

x^x bir tamsayının kendi kuvvetidir. Örneğin

1^1 , 2^2 , 3^3 , 4^4 ,... gibi sayıları hesaplarsak sonuçları hep tamsayı çıkar.

3y ifadesi bir tamsayının 3 ile çarpılacağı anlamındadır. Her tamsayının 3 ile çarpımı yine tamsayıdır.

$x*y = x^x+3y$ İşleminin iki parçası da tamsayıdır.

Bu parçaların toplamı yine tamsayı olur. O halde işleme aldığımız tüm tamsayılar sonuç olarak yine tamsayı veriyor.

İşlem tam sayılar kümesinde kapalıdır.

Örnek; y = xy - 2x işlemi doğalÑx sayılar kümesinde kapalımıdır?

Çözüm; işleminin kapalı olması için doğal sayılarÑ kümesinden bütün elemanları işleme aldığımızda sonuçların tümü doğal sayı olmalıdır. Oysa ;

x = 5 ve y = 4 alırsak

y = xy - 2x işlemiÑx

4 = 5.4 - 2.5 =Ñ5 -10 bulunur.

işlemi doğal sayılar kümesindeÑ-10 doğal sayı olmadığından kapalı değildir.

Örnekler _______________

1. Karıştırma işlemi renkler kümesinde kapalımıdır?

Çözüm; Renkler kümesinden iki renk alıp karıştıralım, karışım sonucu yine bir renk olur. Karıştırma işlemi renkler kümesinde kapalıdır.

2. Karıştırma işlemi sıvılar kümesinde kapalımıdır?

Çözüm; Sıvılar kümesinden iki sıvı alıp karıştırdığımızda, karışım sonucu yine bir sıvı olur mu? Bazen olmaz. İki sıvının karışımının katı olduğu da vardır. Karıştırma işlemi sıvılar kümesinde kapalı değildir.

3. Hayvanlar kümesi Üreme işlemine göre kapalımıdır?

Çözüm; Hayvanlar kümesinin üreme işlemine göre kapalı olması gayet doğaldır. Çünkü üreme sonuçları daima hayvanlar kümesinden bir eleman yani bir hayvan olur, hiçbir zaman iki hayvanın üremesinden farklı bir şey mesela bitki çıkmaz.

________DEĞİŞME ÖZELLİĞİ________

A boş olmayan bir küme ve * işlemi A kümesinde tanımlı bir işlem olsun. A'nın bütün x ve y elemanları için

x*y = y*x oluyorsa yani işlemin sırası değişse de sonuç değişmiyor ise * işlemi A kümesinde değişmelidir denir.

Örnek; x ve y reel sayıdır. $x*y = x^2 - y^2$

şeklinde tanımlanan * işlemi değişmelimidir?

Çözüm; İşlemde x = 3 ve y = 6 koyalım.

$x*y = x^2 - y^2 = 3^2 - 6^2 = -27$

$y*x = y^2 - x^2 = 6^2 - 3^2 = 27$

O halde * işlemi değişmeli değildir.

Örnekler ________________

1.Karıştırma işlemi renkler kümesinde değişmelimidir?

Çözüm; Renkler kümesinden iki renk sözgelimi mavi ile sarı alıp karıştıralım, karışım sonucu yeşil olur. Eğer önce sarı sonra mavi alıp karıştırırsak yine yeşil çıkar. Bu hep böyledir. Renkleri karıştırırken sıranın önemi yoktur. Karıştırma işlemi renkler kümesinde değişmelidir.

2. 2. Karıştırma işlemi sıvılar kümesinde değişmelimidir?

Çözüm; Sıvılar kümesinden iki sıvı alıp karıştırdığımızda, sıranın önemi olmaz. Yani sirke ile limon, limon ile sirkenin aynıdır. Karıştırma işlemi sıvılar kümesinde değişmelidir.

_______BİRLEŞME ÖZELLİĞİ_______

TANIM; işlemi A' da tanımlı birÑA boş olmayan bir küme işlem olsun. A kümesinden alınan üç x,y ve z elemanı
zÑ(yÑz) = (xÑy)Ñz
Şartını sağlıyorsa Ñ işlemi birleşme özeliğine sahiptir.
Kısaca üç elemanın işleminde işlemin sırası değişebiliyorsa birleşme özeliği vardır.
Örnek; Tamsayılar kümesinde x Ñ y = x+4y şeklinde tanımlanan Ñ
işlemi birleşme özelliğine sahip midir?
Çözüm;

(x Ñ y) Ñ z = (x+4y)Ñ z = x+4y +4z
x Ñ (y Ñ z) = x Ñ (y+4z) = x+4y +16z

Sonuçlar farklı olduğundan işlemin birleşme özeliği yoktur.

BİRİM (ETKİSİZ) ELEMAN _________

TANIM; A boş olmayan bir küme ve ▾ ifadesi A' da tanımlı bir işlem olsun ve her x elemanı için A kümesinde

x▾e = e▾x = x

özelliğini sağlayan bir tek e elemanı varsa bu elemana ▾ işleminin etkisiz veya birim elemanı denir.
Örnek; Tamsayılar kümesinde x*y = x+y-3 şeklinde tanımlanmış * işleminin etkisiz (birim) elemanını bulalım.
Çözüm; * işleminin etkisiz elemanına e diyelim,

x*e = e*x = x olmalıdır.
x*e = x+e-3 = x eşitliğini çözersek e =3 bulunur.
e*x = e+x-3 = x eşitliğini çözersek e =3 bulunur.
O halde * işleminin etkisiz elemanı 3 ' tür.

Ters Eleman_____

TANIM; A boş olmayan bir küme ve * işlemi A' da tanımlı bir işlem olsun. Bu işlemin etkisiz elemanı e olsun. A' nın her x elemanı için,

$x*x^{-1} = x^{-1}*x = e$

olacak şekilde A kümesinde bir tane x^{-1} elemanı varsa x^{-1}, x in * işlemine göre tersidir.

Örnek; xΘy = x+y-3 işlemi tanımlanıyor. Bu işleme göre, 4 'ün tersi kaçtır?
Çözüm; 4' ün tersini bulmak için önce Θ işleminin etkisiz elemanını bulmalıyız. İşlemin değişme özeliği varsa sadece xΘe = x şartını yazmak yeterlidir.
xΘe = x+e-3 = x, e = -x+x+3 =3 yani
e = 3 bulunur. Şimdi ters elemanı bulalım:
$4Θ4^{-1} = 4^{-1}Θ4 = 3$ olacak.
Önce $4^{-1}Θ4 = 4^{-1} + 4 - 3 = 3$

$4^{-1} = 3-1=2$

Sonra $4 \ominus 4^{-1} = 4 + 4^{-1} - 3 = 3$

$4^{-1} = 3-1=2$

4 ' ün tersi $4^{-1}=2$ bulunur.

Örnek; Aşağıdaki tabloda verilen @ işleminin özeliklerini araştıralım:

@	0	1	2	3
0	1	0	2	3
1	0	1	2	3
2	3	2	0	0
3	3	3	0	1

Çözüm;

@	0	1	2	3
0	3	0	2	1
1	0	1	2	3
2	2	2	0	0
3	1	3	0	1

Tanım Kümesi

Esas Köşegen

i. i. İşlem kapalıdır. Çünkü işlemin sonuçları tanım kümesinin elemanlarıdır. Yani 0, 1, 2, 3 sayılarıdır.

ii. ii. İşlemin değişme özeliği vardır. Çünkü tablo esas köşegene göre simetriktir.

iii. İşlemin birim elemanı sıralı satır ve sütunun kesiştiği elemandır. Yani burada 1 dir.

@	0	1	2	3
0	3	0	2	1
1	0	1	2	3
2	2	2	0	0
3	1	3	0	1

iv. iv. 2 ve 0 'ın tersi yani 2^{-1} ve 0^{-1} kaçtır?

- 2 nin tersini bulmak için tabloda 2 nin bulunduğu satırda birim elemanı yani burada 1 ' i ararız. 2 nin satırında 1 yoktur. 2 nin tersi yoktur.
- 0 ın tersini bulmak için tabloda 0 ın bulunduğu satırda birim elemanı yani burada 1 ' i ararız. 0 ın satırında 1 i bulup yukarı çıkarsak tersini buluruz. 0 ın tersi 0 dır.

i. i. 2@(3@1) = ? işleminin sonucu kaçtır?

Önce parantez içindeki işlemi yapalım: Tablonun satırında önce 3'ü buluruz. Sonra sütunda 1'i buluruz. İkisinin kesiştiği sayı işlemin sonucudur. (3@1) = 3 dür. Şimdi 2@3 işlemini yapalım. Aynı şekilde 2@3 = 0 bulunur. İşlemin sonucu 2@(3@1) = 0 bulunur.

@	0	1	2	3
0	3	0	2	1
1	0	1	2	3
2	2	2	0	0
3	1	3	0	1

ALIŞTIRMALAR

1. x@y = x^2y+2y işlemi doğal sayılar kümesinde tanımlanıyor. 2@y = 6 ise y =?
2. a▾b = a / b-4 ve x ¤ y = 3^x + yx işlemleri veriliyor.
3▾(-4¤2) = ?
3. xΘy = 2xy + x^2 + y^2 işleminin birim elemanı varsa kaçtır?
4. x ve y reel sayılar kümesinin elemanıdır. x*y = x+y+5xy işlemi tanımlanıyor.
a) * işlemi değişmelimidir?
b) * işlemine göre etkisiz eleman nedir?
c) * işlemine göre 4 'ün tersi kaçtır?
d) * işlemine göre hangi reel sayının tersi bulunamaz?

5. 5. Reel sayılar kümesinde x&y = 2x+2y+xy şeklinde tanımlanan & işleminde hangi elemanın tersi yoktur?
6. 6. R 'de tanımlı x*y = 2x-y işlemi için (2*3)*a = 0 ise a kaçtır?
7. 7. R - $\left\{\frac{2}{3}\right\}$

'de tanımlanan ,
x$\otimes$y=-3xy-2x-2y-2 işleminin etkisiz eleman nedir ?

8. $x \square y = x+2xy+y$ işlemine göre -3 ' ün tersi kaçtır?
9. İnsanlar kümesinde konuşma işlemi değişmelimidir?
10. Renkler kümesinde karıştırma işleminin birleşme özeliği varmıdır? Bu işlemin birim elemanı varmıdır?