

# İKİNCİ DERECEDEDEN BİR BİLİNMEYENLİ DENKLEMLER

## TANIMLAR :

$a, b, c \in \mathbb{R}$  ve  $a \neq 0$  olmak üzere  $ax^2 + bx + c = 0$  denklemine, **ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklem** denir.

Bu denklemdeki  $a, b, c$  gerçel sayılarına **katsayılar**,  $x$ 'e **bilinmeyen** denir.

Bu denklemi gerçekleyen gerçel sayılara denklemin **gerçel kökleri**, denklemin köklerini bulma işlemine **denklemin çözümü** denir.

Denklemin köklerinin kümesine de denklemin **çözüm kümesi** denir.

## UYARI

Ayrıca belirtilmedikçe, denklemin çözüm kümesi denildiğinde, denklemin  $\mathbb{R}$  deki çözüm kümesi anlaşılacaktır.

## İKİNCİ DERECEDEDEN BİR BİLİNMEYENLİ DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİ

İlk olarak  $ax^2 + bx + c = 0$  denklemini çarpanlarına ayırarak çözebiliriz.

### ÖRNEKLER :

Aşağıdaki denklemlerin çözüm kümelerini bulunuz.

1.  $3x^2 - 5x = 0$

2.  $x^2 - x - 6 = 0$

3.  $2x^2 + x - 1 = 0$

### CÖZÜMLER :

1.  $3x^2 - 5x = 0$

$$x \cdot (3x - 5) = 0$$

$$x = 0 \quad \vee \quad 3x - 5 = 0$$

$$x = \frac{5}{3}$$

$$\mathbb{C} = \left\{ 0, \frac{5}{3} \right\}$$

2.  $x^2 - x - 6 = 0$

$$(x - 3) \cdot (x + 2) = 0$$

$$x - 3 = 0 \quad \vee \quad x + 2 = 0$$

$$x = 3 \quad x = -2$$

$$\mathbb{C} = \{-2, 3\}$$

3.  $2x^2 + x - 1 = 0$

$$(x + 1) \cdot (2x - 1) = 0$$

$$x + 1 = 0 \quad \vee \quad 2x - 1 = 0$$

$$x = -1 \quad x = \frac{1}{2}$$

$$\mathbb{C} = \left\{ -1, \frac{1}{2} \right\}$$

## $ax^2 + bx + c = 0$ DENKLEMİNİN GENEL ÇÖZÜMÜ (FORMÜLE ÇÖZÜM)

$ax^2 + bx + c = 0$  ikinci dereceden denklemi düzenlenirse;

$$ax^2 + bx + c = a \left( x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) = a \left( x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{b^2}{4a^2} \right)$$

( $x$ 'in katsayısının yarısının karesi eklenip çıkarıldı).

$$= a \left[ \left( x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} \right) - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} \right]$$

$$= a \left[ \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right]$$

$$= a \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} = 0 \text{ ise}$$

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a} \Rightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$\Rightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right) = \mp \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} \Rightarrow x + \frac{b}{2a} = \frac{\mp \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\Rightarrow x = -\frac{b}{2a} \mp \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-b \mp \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

o halde  $x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$  ve  $x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$  elde edilir.

Bu kökler gerçel sayı ise  $b^2 - 4ac \geq 0$  olması gerekir.

### TANIM :

$ax^2 + bx + c = 0$  denkleminde  $b^2 - 4ac$  ifadesine denklemin diskriminantı denir ve  $\Delta$  ile gösterilir.

Denklemin kökleri ise  $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ ,  $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$  formülleri ile bulunur.

Bu kökler kısaca,  $x_{1,2} = \frac{-b \mp \sqrt{\Delta}}{2a}$  biçiminde yazılır.

**İrdeleme:**  $ax^2 + bx + c = 0$  denkleminde  $\Delta = b^2 - 4ac$  iken

1.  $\Delta > 0$  ise denklemin birbirinden farklı iki gerçel kökü vardır.

Bunlar  $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ ,  $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$  dir.

### UYARI

a ile c gerçel sayıları ters işaretli ise  $\Delta > 0$  dir.

2.  $\Delta = 0$  ise denklemin birbirine eşit iki gerçel kökü vardır. Bu durumda denklemin **çakışık iki kökü vardır** ya da **iki kat kökü vardır** da denir.

Bunlar  $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$  dir.

$\Delta = 0$  olduğundan  $(ax^2 + bx + c)$  ifadesi tamkare olur.

3.  $\Delta < 0$  ise denklemin gerçel kökü yoktur. Denklemin R deki çözüm kümesi  $\emptyset$  dir.

### **İNDİRGENMİŞ DİSKRİMİNANT (YARIM FORMÜL)**

$ax^2 + bx + c = 0$  denkleminde b çift iken kullanılabilir.  $b' = \frac{b}{2}$  olsun. Bu durumda,  $\Delta' = (b')^2 - ac$

$$x_{1,2} = \frac{-b' \mp \sqrt{\Delta'}}{a} \text{ olur.}$$

### **ÖRNEKLER :**

Aşağıdaki denklemlerin çözüm kümelerini bulunuz.

1.  $x^2 + 3x - 1 = 0$       2.  $2x^2 - 3x + 10 = 0$       3.  $x^2 - 2\sqrt{3}x + 3 = 0$

### **CÖZÜMLER :**

1.  $x^2 + 3x - 1 = 0$

$a = 1, b = 3, c = -1$

$\Delta = (3)^2 - 4(1)(-1) = 9 + 4 = 13$

$$x_{1,2} = \frac{-3 \mp \sqrt{13}}{2.1} = \frac{-3 \mp \sqrt{13}}{2}$$

$$Ç = \left\{ \frac{-3 - \sqrt{13}}{2}, \frac{-3 + \sqrt{13}}{2} \right\}$$

2.  $2x^2 - 3x + 10 = 0$

$a = 2, b = -3, c = 10$

$\Delta = (-3)^2 - 4.2.10 = 9 - 80 = -71$

$\Delta < 0$  olduğundan  $Ç = \emptyset$  dir.

2.  $x^2 - 2\sqrt{3}x + 3 = 0$

$a = 1, b = -2\sqrt{3}, c = 3$

$$b' = \frac{b}{2} = \frac{-2\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{3}$$

$\Delta' = (-\sqrt{3})^2 - 1.3 = 3 - 3 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{-(-\sqrt{3}) \mp \sqrt{0}}{1} = \frac{\sqrt{3} \mp 0}{1} = \sqrt{3}$$

$$Ç = \{\sqrt{3}\}$$

## **İKİNCİ DERECEDE DENKLEMLERE DÖNÜŞTÜRÜLEBİLEN DENKLEMLER:**

### **A) ÇARPANLARINA AYRILABİLEN DENKLEMLER**

$$P(x).Q(x) = 0 \Leftrightarrow P(x) = 0 \vee Q(x) = 0$$

### **ÖRNEKLER :**

Aşağıdaki denklemlerin çözüm kümelerini bulunuz.

1.  $2x^3 + 3x^2 - 18x - 27 = 0$

2.  $3(x - 4)^2 - 48 = 0$

### **ÖRNEKLER :**

1.  $2x^3 + 3x^2 - 18x - 27 = 0$

2.  $3(x - 4)^2 - 48 = 0$

$$x^2(2x+3) - 9(2x+3) = 0$$

$$(2x+3)(x^2-9) = 0$$

$$(2x+3) \cdot (x-3)(x+3) = 0$$

$$2x+3=0 \quad \vee \quad x-3=0 \quad \vee \quad x+3=0$$

$$x = -\frac{3}{2}$$

$$x = 3$$

$$x = -3$$

$$C = \left\{ -3, -\frac{3}{2}, 3 \right\}$$

$$3[(x-4)^2 - 16] = 0 \Rightarrow (x-4)^2 - 4^2 = 0$$

$$(x-4) - 4 = 0 \quad \vee \quad (x-4) + 4 = 0$$

$$x - 8 = 0$$

$$x = 0$$

$$x = 8$$

$$C = \{0, 8\}$$

## A) RASYONEL DENKLEMLER

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = 0 \Leftrightarrow P(x) = 0 \quad \wedge \quad Q(x) \neq 0$$

### ÖRNEK:

$$\frac{27}{2x^2 + 7x - 4} + \frac{2x}{x+4} = \frac{6}{2x-1} - 1 \text{ denkleminin çözüm kümesi nedir?}$$

### CÖZÜM:

$$\frac{27}{(2x-1)(x+4)} + \frac{2x}{x+4} = \frac{6}{2x-1} - \frac{1}{1}$$

$$(1) \quad (2x-1)(x+4) \quad (2x-1)(x+4)$$

$$\frac{27 + 2x(2x-1)}{(2x-1)(x+4)} = \frac{6 \cdot (x+4) - (2x-1)(x+4)}{(2x-1)(x+4)}$$

$$27 + 4x^2 - 2x = 6x + 24 - 2x^2 - 7x + 4$$

$$6x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow (2x-1)(3x+1) = 0$$

$$x = \frac{1}{2}$$

$$x = -\frac{1}{3}$$

$$C = \left\{ -\frac{1}{3} \right\}$$

## B) YARDIMCI BİLİNMEYEN KULLANILARAK ÇÖZÜLEN DENKLEMLER (DEĞİŞKEN DEĞİŞTİRME)

**ÖRNEK:**  $x^6 + 26x^3 - 27 = 0$  denkleminin çözüm kümesi nedir?

### CÖZÜM:

$$x^3 = t \text{ olsun } x^6 = (x^3)^2 = t^2 \text{ olur.}$$

Buradan denklem

$$t^2 + 26t - 27 = 0 \text{ biçimine dönüşür.}$$

$$\Rightarrow (t+27) \cdot (t-1) = 0$$

$$t+27=0 \quad \vee \quad t-1=0$$

$$\begin{aligned}t &= -27 & t &= 1 \\x^3 &= -27 & x^3 &= 1 \\x &= -3 & x &= 1\end{aligned}$$

$$Ç = \{-3, 1\}$$

### C) KÖKLÜ DENKLEMLER

$n \in \mathbb{N}^+$  ve  $P(x) \in \mathbb{R}_{[x]}$  olmak üzere

- ${}^{2n+1}\sqrt{P(x)}$  ifadesi  $\forall x \in \mathbb{R}$  için tanımlıdır
- ${}^{2n}\sqrt{P(x)}$  ifadesi,  $P(x) \geq 0$  koşulunu gerçekleyen  $x$ 'ler için tanımlıdır.

Köklü denklemler çözülürken genelde şu yol izlenir:

- Köklü ifade (ya da köklü ifadelerden birisi) eşitliğin bir yanında yalnız bırakılır.
- Her iki taraf uygun kuvveti alınarak, denklem kökten kurtarılır.
- Kökten kurtulmuş denklem çözülerek bulunan çözümlerin yukarıda belirtilen koşullara uygun olup olmadığına ya da denklemi sağlayıp sağlamadığına bakılarak denklemin çözüm kümesi bulunur.

#### ÖRNEK:

$$\sqrt{x+6} - 4 = x \text{ denkleminin çözüm kümesi nedir?}$$

#### ÇÖZÜM:

$$\sqrt{x+6} - 4 = x \Rightarrow \sqrt{x+6} = x + 4 \text{ eşitliğinin sağlanması için,}$$

$$x + 6 \geq 0 \text{ ve } x + 4 \geq 0 \Rightarrow x \geq -4 \text{ olmalıdır.}$$

$$(\sqrt{x+6})^2 = (x+4)^2$$

$$x + 6 = x^2 + 8x + 16 \Rightarrow x^2 + 7x + 10 = 0$$

$$(x+5)(x+2) = 0 \Rightarrow x = -5 \vee x = -2$$

$$\Rightarrow Ç = \{-2\}$$

### D) ÜSLÜ DENKLEMLER

#### ÖRNEK:

$$3^{x^2+x-6} = 1 \text{ denkleminin çözüm kümesi nedir?}$$

#### ÇÖZÜM:

$$3^{x^2+x-6} = 1 \Rightarrow x^2 + x - 6 = 0 \text{ dir.}$$

$$(x+3)(x-2) = 0 \Rightarrow x + 3 = 0 \vee x - 2 = 0$$

$$\Rightarrow x = -3 \quad x = 2$$

$$Ç = \{-2, 3\}$$

### F) MUTLAK DEĞERLİ DENKLEMLER

Mutlak değerli ifade içeren bir denklemi çözmek için yapılacak ilk işlem, gerçel sayılarda mutlak değer tanımını kullanarak mutlak değeri kaldırmaktır. Bunu şöyle açıklayabiliriz.

$$n \in \mathbb{N}^+$$

$$\sqrt[n]{[f(x)]^{2n}} = |f(x)| = \begin{cases} f(x), f(x) \geq 0 \\ -f(x), f(x) < 0 \end{cases}$$

### **ÖRNEK:**

$x^2 - |x| - 2 = 0$  denkleminin çözüm kümesi nedir?

### **CÖZÜM:**

$$x^2 - |x| - 2 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - (-x) - 2 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + x - 2 = 0$$

$$\Rightarrow (x + 2) \cdot (x - 1) = 0$$

$$x = -2 \quad x = 1$$

$$C_1 = \{-2\}$$

$x \geq 0 \Rightarrow |x| = x$  dir.

$$\Rightarrow x^2 - x - 2 = 0$$

$$(x - 2) (x + 1) = 0$$

$$x = 2 \quad \vee \quad x = -1$$

$$C_2 = \{2\}$$

Denklemin çözüm kümesi ise  $C = C_1 \cup C_2$  dir. Buradan  $C = \{-2, 2\}$  bulunur.

## **DENKLEM SİSTEMLERİ**

### **ÖRNEK:**

$$\left. \begin{array}{l} x \cdot y = 64 \\ x + y = 20 \end{array} \right\} \text{ sisteminin çözüm kümesi nedir?}$$

### **CÖZÜM:**

$$x + y = 20 \Rightarrow y = 20 - x, \quad x \cdot y = 64 \Rightarrow x \cdot (20 - x) = 64$$

$$20x - x^2 = 64 \Rightarrow x^2 - 20x + 64 = 0$$

$$\Rightarrow (x - 16) (x - 4) = 0, \quad x_1 = 16 \quad \vee \quad x_2 = 4$$

$$\Rightarrow y_1 = 20 - 16 \quad \Rightarrow y_2 = 20 - 4$$

$$y_1 = 4 \quad y_2 = 16$$

$$C = \{(16, 4), (4, 16)\}$$

### **ÖRNEK:**

$$\left. \begin{array}{l} \sqrt{2x} - \sqrt{3y} = 2 \\ 2x - 3y = 12 \end{array} \right\} \text{ sisteminin çözüm kümesi nedir?}$$

### **CÖZÜM:**

$$\sqrt{2x} - \sqrt{3y} = 3$$

$$2x - 3y = 12 \Rightarrow (\sqrt{2x})^2 - (\sqrt{3y})^2 = 12$$

$$\Rightarrow (\sqrt{2x} - \sqrt{3y})(\sqrt{2x} + \sqrt{3y}) = 12$$

$$\Rightarrow \sqrt{2x} + \sqrt{3y} = 6$$

$$\left. \begin{array}{l} \sqrt{2x} - \sqrt{3y} = 2 \\ \sqrt{2x} + \sqrt{3y} = 6 \end{array} \right\} \Rightarrow 2\sqrt{2x} = 8$$

$$\Rightarrow \sqrt{2x} = 4 \Rightarrow x = 8$$

$$\Rightarrow \sqrt{2x} + \sqrt{3y} = 6 \Rightarrow \sqrt{2y} = 2 \Rightarrow y = \frac{4}{3}$$

$$C = \left\{ \left( 8, \frac{4}{3} \right) \right\}$$

## PAREMETRELİ DENKLEMLER

İçinde x değişkeninden başka sabit ya da sabitler bulunan denklemlere **parametrelî denklemler** denir.

Örneğin;  $mx^2 - (m - 1)x - 2m + 3 = 0$  denklemindeki parametre m ;  $2x^2 - (a - b)x + a \cdot b = 0$  denklemindeki parametreler a ve b dir.

### ÖRNEK:

$(m - 3)x^2 - 2mx + 3(m - 1) = 0$  denkleminin köklerinden birisi (-1) ise m kaçtır?

### ÇÖZÜM:

$$(m - 3)x^2 - 2mx + 3(m - 1) = 0$$

$$x = -1 \text{ için } (m - 3)(-1)^2 - 2m(-1) + 3(m - 1) = 0$$

$$m - 3 + 2m + 3m - 3 = 0$$

$$6m = 6 \Rightarrow m = 1$$

### ÖRNEK:

$mx^2 - 2(m - 1)x + m - 5 = 0$  denkleminin birbirine eşit iki kökünün olabilmesi için (m) kaç olmalıdır?

### ÇÖZÜM:

$x_1 = x_2$  ise  $\Delta = 0$  olmalıdır.

$$\Rightarrow (b)^2 - ac = 0 \quad \Delta \quad [-(m - 1)]^2 - m(m - 5) = 0$$

$$m^2 - 2m + 1 - m^2 + 5m = 0 \Rightarrow m = -\frac{1}{2}$$

## UYARI

İkinci dereceden bir bilinmeyenli bir iki denklemin birer kökleri aynı (ortak) ise, bu iki denklemden  $x^2$  li terimler yok edilir. Bulunan x değeri, denklemlerin ortak kökü olur.

### ÖRNEK:

$$\left. \begin{array}{l} 2x^2 - (n - 1)x - m + 6 = 0 \\ 3x^2 - 2x + 2m - 1 = 0 \end{array} \right\} \text{ denklemlerinin çözüm kümesi eşit ise } (m, n) \text{ ikilisi nedir?}$$

### ÇÖZÜM:

1. YOL : Çözüm kümeleri eşit ise denklemlerde birbirine eşit olmalıdır.

$$3 / 2x^2 - (n - 1)x - m + 6 = 0$$

$$\underline{2/3x^2 - 2x + 2m - 1 = 0}$$

$$\left. \begin{array}{l} 6x^2 - 3(n-1)x - 3 + 18 = 0 \\ 6x^2 - 4x + 4m - 2 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$-3(n-1) = -4 \quad \text{ve} \quad -3m + 18 = 4m - 2$$

$$n - 1 = \frac{4}{3} \quad 7m = 20$$

$$n - 7 = \frac{7}{3} \quad m = \frac{20}{7}$$

## İKİNCİ DERECEDEKİ BİR DENKLEMİN KÖKLERİ İLE KATSAYILARI ARASINDAKİ BAĞINTILAR

$ax^2 + bx + c = 0$  denkleminin diskriminantı  $\Delta = b^2 - 4ac$  ve kökleri  $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$  ve  $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$  idi.

Buna göre ;

1. Köklerin toplamı :  $x_1 + x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}$

2. Köklerin çarpımı :  $x_1 \cdot x_2 = \left( \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \right) \cdot \left( \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \right) = \frac{b^2 + b\sqrt{\Delta} - b\sqrt{\Delta} - \Delta}{4a^2} = \frac{b^2 - b^2 + 4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$

3. Köklerin farkı :  $|x_1 - x_2| = \left| \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} - \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \right| = \left| \frac{-b - \sqrt{\Delta} + b - \sqrt{\Delta}}{2a} \right| = \frac{2\sqrt{\Delta}}{2|a|} = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$

4. Köklerin çarpma işlemine göre terslerinin toplamı :  $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_2 + x_1}{x_1 \cdot x_2} = \frac{-\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} = -\frac{b}{c}$

5. Köklerin karelerinin toplamı :  $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$   
 $= \left( -\frac{b}{a} \right)^2 - 2 \cdot \left( \frac{c}{a} \right) = \frac{b^2 - 2ac}{a^2}$

6. Köklerin karelerinin çarpma işlemine göre terslerinin toplamı :

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_2^2 + x_1^2}{(x_1 \cdot x_2)^2} = \frac{\frac{b^2 - 2ac}{a^2}}{\left( \frac{c}{a} \right)^2} = \frac{b^2 - 2ac}{c^2}$$

7. Köklerin küplerinin toplamı :  $x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2)$

$$= \left( -\frac{b}{a} \right)^3 - 3 \cdot \left( \frac{c}{a} \right) \cdot \left( -\frac{b}{a} \right) = \frac{3abc - b^3}{a^3}$$

8. Köklerinin küplerinin çarpma işlemine göre terslerinin toplamı :

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_2^3 + x_1^3}{(x_1 \cdot x_2)^3} = \frac{3abc - b^3}{\left(\frac{c}{a}\right)^3} = \frac{3abc - b^3}{c^3}$$

### UYARI

Köklerle katsayılar arasında verilen bağıntılardan ilk üçünün esas alınarak, diğerlerinin bunlardan ve özdeşliklerden yararlanılarak elde edildiğine dikkat ediniz.

### ÖRNEK:

$2x^2 - 4x + m - 3 = 0$  denkleminin kökleri  $x_1$  ve  $x_2$  dir.

$x_1^2 + x_2^2 = 4$  ise  $m$  kaçtır?

### ÇÖZÜM:

Denklemden  $a = 2$ ,  $b = -4$ ,  $c = m - 3$  dür.

$$x_1^2 + x_2^2 = 4 \Rightarrow \frac{b^2 - 2ac}{a^2} = 4 =$$

$$\Rightarrow \frac{(-4)^2 - 2 \cdot (2)(m - 3)}{2^2} = 4$$

$$16 - 4m + 12 = 16$$

$$m = 3$$

### ÖRNEK:

$2x^2 + 7x - 1 = 0$  denkleminin köklerinin 3 er eksiğinin çarpımı kaçtır?

### ÇÖZÜM:

Denklemin kökleri  $x_1, x_2$  olsun.

İstenen bağıntı  $(x_1 - 3) \cdot (x_2 - 3)$  dür.

Buna göre;

$$(x_1 - 3) \cdot (x_2 - 3) = x_1x_2 - 3x_1 - 3x_2 + 9$$

$$= x_1 \cdot x_2 - 3 \cdot (x_1 + x_2) + 9 = \left(-\frac{1}{2}\right) - 3 \cdot \left(-\frac{7}{2}\right) + 9$$

$$= -\frac{1}{2} + \frac{21}{2} + 9 = 19 \text{ olur.}$$

### **KÖKLERİ VERİLEN DENKLEMİ BULMAK**

Kökleri  $x_1, x_2$  olan ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklemler,  $(x - x_1) \cdot (x - x_2) = 0$  biçimindedir. Bu denklem düzenlenirse,  $x^2 - (x_1 + x_2) \cdot x + (x_1 \cdot x_2) = 0$  denklemi elde edilir.

### ÖRNEK:

Kökleri  $-3$  ile  $2$  olan ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklem nedir?

### ÇÖZÜM:

$$\left. \begin{array}{l} x_1 + x_2 = (-3) + (2) = -1 \\ x_1 \cdot x_2 = (-3) \cdot (2) = -6 \end{array} \right\} \text{ olduğundan denklem,}$$

$$x^2 - (x_1 + x_2) \cdot x + (x_1 \cdot x_2) = 0 \Rightarrow x^2 - (-1) \cdot x + (-6) = 0 \\ \Rightarrow x^2 + x - 6 = 0 \text{ dir.}$$

### **ÖRNEK:**

Katsayıları rasyonel sayı olan ikinci dereceden bir bilinmeyenli bir denklemin köklerinden birisi  $x_1 = 3 - \sqrt{2}$  dir.

Bu denklem nedir?

### **ÇÖZÜM:**

### **UYARI**

a, b, c, p, q  $\in \mathbb{Q}$  olmak üzere  $ax^2 + bx + c = 0$  denkleminin bir kökü  $x_1 = p + \sqrt{q}$  ise  $x_2 = p - \sqrt{q}$  dir.

Buna göre  $x_1 = 3 - \sqrt{2}$  ise  $x_2 = 3 + \sqrt{2}$  dür.

$$x_1 + x_2 = (3 - \sqrt{2}) + (3 + \sqrt{2}) = 6,$$

$$x_1 \cdot x_2 = (3 - \sqrt{2}) \cdot (3 + \sqrt{2}) = 3^2 - (\sqrt{2})^2 = 9 - 2 = 7 \text{ dir.}$$

$$\text{Denklem, } x^2 - (x_1 + x_2)x + (x_1 \cdot x_2) = 0$$

$$x^2 - 6x + 7 = 0 \text{ olur.}$$

## ***ÇÖZÜMLÜ ÖRNEKLER***

1.  $x^2 - x + |1-x| = 0$  denkleminin çözüm kümesi nedir?

### **ÇÖZÜM:**

$$x^2 - x + |1-x| = 0 \Rightarrow x(x-1) + |1-x| = 0$$

$$x \leq 1 \Rightarrow x \cdot (x-1) + (1-x) = 0$$

$$x(x-1) - (x-1) = 0$$

$$(x-1)(x-1) = 0$$

$$x = 1$$

$$Ç = \{1\}$$

2.  $\frac{x+3}{2x-1} + \frac{12x-6}{x+3} - 5 = 0$  denkleminin köklerinin çarpımı kaçtır?

### **ÇÖZÜM:**

$$\frac{x+3}{2x-1} + 6 \cdot \frac{2x-1}{x+3} - 5 = 0$$

$$\frac{x+3}{2x-1} = t \text{ olsun.}$$

$$t + 6 \cdot \frac{1}{t} - 5 = 0 \Rightarrow \frac{t^2 + 6 - 5t}{t} = 0$$

$$t^2 - 5t + 6 = 0 \Rightarrow (t - 3)(t - 2) = 0$$

$$\Rightarrow t = 3 \vee t = 2$$

$$\frac{x + 3}{2x - 1} = 3$$

$$\frac{x + 3}{2x - 1} = 2$$

$$6x - 3 = x + 3$$

$$x + 3 = 4x - 2$$

$$x = \frac{6}{5}$$

$$x = \frac{5}{3}$$

$$\frac{6}{5} \cdot \frac{5}{3} = 2$$

3.  $\sqrt{3x + 1} - 2\sqrt{2x - 6} = 2$  denkleminin kökleri  $x_1$  ve  $x_2$  dir.  $|x_1 - x_2|$  nedir?

**ÇÖZÜM:**

$$(\sqrt{3x + 1})^2 = (2 + \sqrt{2x - 6})^2$$

$$3x + 1 = 4 + 4\sqrt{2x - 6} + 2x - 6$$

$$(x + 3)^2 = (4 + \sqrt{2x - 6})^2$$

$$x^2 + 6x + 9 = 16(2x - 6)$$

$$x^2 - 26x + 105 = 0$$

$$(x - 21)(x - 5) = 0$$

$$x_1 = 21 \quad x_2 = 5$$

$$|x_1 - x_2| = |21 - 5| = 16$$

4.  $3^{x+1} + 3^{x-2} + 3^{x-3} + 3^{x-4} = 768$  denklemini sağlayan x değeri nedir?

**ÇÖZÜM:**

$$3^{x+1} + 3^{x-2} + 3^{x-3} + 3^{x-4} = 768$$

$$3^x \left( 3 + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} \right) = 768$$

$$3^x \left( \frac{243 + 9 + 3 + 1}{81} \right) = 768$$

$$3^x = 768 \cdot \frac{81}{256} \Rightarrow 3^x = 243 \Rightarrow x = 5$$

$$5. \left. \begin{array}{l} x + y + z = 19 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 133 \\ y^2xz \end{array} \right\} \text{ sistemini sağlayan y değeri nedir?}$$

**ÇÖZÜM:**

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 19 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 133 \\ y^2 = xz \end{array} \right\}$$

$$x + y + z = 19 \Rightarrow (x + z)^2 = (19 - y)^2$$

$$x^2 + z^2 + 2xz = 361 - 38y + y^2$$

$$133 - y^2 + 2y^2 = 361 - 38y + y^2$$

$$38y = 228 \Rightarrow y = 6$$

6. Köklerinden birisi  $\sqrt{3} - 2$  olan rasyonel katsayılı ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklem nedir?

**ÇÖZÜM:**

$$x_1 = \sqrt{3} - 2 \Rightarrow x_1 = -2 + \sqrt{3} \text{ ise}$$

$$x_2 = -2 - \sqrt{3} \text{ dir.}$$

$$x_1 + x_2 = (-2 + \sqrt{3}) + (-2 - \sqrt{3}) = -4$$

$$\begin{aligned} x_1 \cdot x_2 &= (-2 + \sqrt{3})(-2 - \sqrt{3}) = (-2)^2 - (\sqrt{3})^2 \\ &= 4 - 3 = 1 \end{aligned}$$

Denklem,

$$x^2 - (x_1 + x_2)x + (x_1 \cdot x_2) = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - (-4)x + 1 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + 4x + 1 = 0 \text{ olur.}$$

7.  $mx^2 - 2(m-2)x + m - 3 = 0$  denkleminin kökleri  $x_1, x_2$  dir.  $x_1 + x_2 = s$  ve  $x_1 \cdot x_2 = p$  olmak üzere, bu denklemin kökleri arasında  $m$ 'ye bağlı olmayan bağıntı nedir?

**ÇÖZÜM:**

$$mx^2 - 2(m-2)x + m - 3 = 0$$

$$x_1 + x_2 = -\frac{-2(m-2)}{m} \Rightarrow s = \frac{2(m-2)}{m}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{m-3}{m} \Rightarrow p = \frac{m-3}{m}$$

$$s = 2 - 4 \cdot \frac{1}{m} \wedge p = 1 - 3 \cdot \frac{1}{m} \Rightarrow \frac{s-2}{-4} = \frac{1}{m}$$

$$\Rightarrow p = 1 - 3 \cdot \left( \frac{s-2}{-4} \right)$$

$$\Rightarrow 4p = 4 + 3s - 6 \Rightarrow 4p - 3s = -2$$

bulunur.

8.  $3x^2 + mx - 6 = 0$  denkleminde  $\frac{2}{x_1} + \frac{x_2}{2} = 4$  bağıntısı varsa  $m$  kaçtır?

**ÇÖZÜM:**

Bu denklemde,

$$4 + x_1x_2 = 8x_1 \Rightarrow 4 + (-2) = 8x_1 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{4}$$

$$x_1 \cdot x_2 = -2 \Rightarrow \left(\frac{1}{4}\right) \cdot x_2 = -2 \Rightarrow x_2 = -8$$

$$x_1 + x_2 = -\frac{m}{3}$$

$$-\frac{31}{4} = -\frac{m}{3}$$

$$m = \frac{93}{4}$$

9.  $6x^2 - 11mx - 10m^2 = 0$  ise  $\frac{x}{m}$  nedir?

**ÇÖZÜM:**

$$6x^2 - 11mx - 10m^2 = 0$$

$$2x \quad -5m$$

$$\underline{3x \quad 2m}$$

$$(2x - 5m)(3x + 2m) = 0 \text{ ise}$$

$$x_1 = \frac{5m}{2}, x_2 = \frac{-2m}{3}$$

$$\frac{x}{m} = \frac{5m}{2m} = \frac{5}{2}$$

10.  $2x^2 + x + m + 2 = 0$  denkleminin  $x_1$  ve  $x_2$  kökleri arasında  $\frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_1} = 5$  bağıntısı varsa,  $m$  tam sayısı nedir?

**ÇÖZÜM:**

$$\frac{b^2 - 2ac}{c^2} = 5 \Rightarrow \frac{1 - 4(m + 2)}{(m + 2)^2} = 5$$

$$1 - 4m - 8 = 5m^2 + 20m + 20$$

$$5m^2 + 24m + 27 = 0$$

$$(5m + 9)(m + 3) = 0$$

$$C = \left\{ -3, \frac{-9}{5} \right\}$$