

TRIGONOMETRİ

AÇI, YÖNLÜ AÇI, YÖNLÜ YAY

A. AÇI

Başlangıç noktaları aynı olan iki ışının birleşim kümesine açı denir. Bu ışınlara açının kenarları, başlangıç noktasına ise açının köşesi denir.

B. YÖNLÜ AÇI

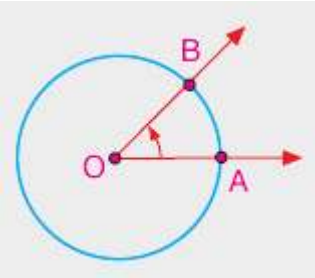
Bir açının kenarlarından birini, başlangıç kenarı; diğerini bitim kenarı olarak aldığımızda elde edilen açıya yönlü açı denir.

Açılar adlandırılırken önce başlangıç, sonra bitim kenarı yazılır.

KURAL

Açının köşesi etrafında, başlangıç kenarından bitim kenarına iki türlü gidilebilir. Bunlardan biri saatin dönme yönünün tersi, ikincisi ise saatin dönme yönünün aynısıdır. Saatin dönme yönünün; tersi olan yöne pozitif yön, aynı olan yöne negatif yön denir. Açıların yönü ok yardımıyla belirlenir.

C. YÖNLÜ YAYLAR

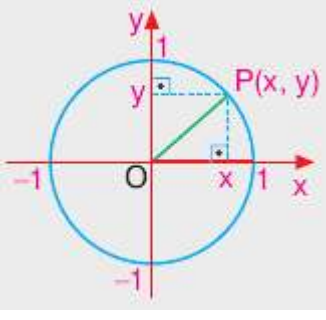


O merkezli çemberde \widehat{AOB} ile bu açının iç bölgesindeki noktaların kümesinin O merkezli çemberle kesişimi AB yayıdır. AB yayı, \widehat{AB} biçiminde gösterilir.

\widehat{AB} 'nin yönü olarak, AOB açısının yönü alınır. Şekildeki AOB açısının yönü pozitif olduğundan, \widehat{AB} da pozitif yönlüdür.

Pozitif yönlü AB yayında A ya yayın başlangıç noktası, B ye yayın bitim noktası denir.

D. BİRİM ÇEMBER



Analitik düzlemde merkezi $O(0, 0)$ (orijin) ve yarıçapı 1 birim olan çembere birim (trigonometrik) çember denir.

Birim çemberin denklemi:

$$x^2 + y^2 = 1 \text{ dir.}$$

E. AÇI ÖLÇÜ BİRİMLERİ

Bir açının ölçüsünün büyüklüğünü veya küçüklüğünü tanımlamak için, bir ölçü birimi tanımlanmalıdır. Açıyı ölçmek, açının kolları arasındaki açıklığı belirlemek demektir.

Genellikle iki birim kullanılır. Bunlar; derece ve radyandır.

1. Derece

Bir tam çember yayının 360 eş parçasından birini gören merkez açının ölçüsüne 1 derece denir. Ve 1° ile gösterilir.

2. Radyan

Yarıçap uzunluğuna eşit uzunluktaki bir yayı gören merkez açının ölçüsüne 1 radyan denir.

UYARI

Birim çemberin çevresi 360° veya 2π radyan olduğu için, $360^\circ = 2\pi$ radyan dır.

Kural

Derece D ile radyan R ile gösterilirse,

$$\frac{D}{180} = \frac{R}{\pi} \text{ dir.}$$

F. ESAS ÖLÇÜ

$$k \in \mathbb{Z} \text{ ve } a \in [0^\circ, 360^\circ)$$

olmak üzere, birim çember üzerinde a açısı ile

$a + k \times 360^\circ$ açısı aynı noktaya karşılık gelmektedir. Buna göre, $0^\circ \leq \alpha < 360^\circ$ ve $k \in \mathbb{Z}$

olmak üzere, ölçüsü

$$a + k \times 360^\circ$$

olan açının esas ölçüsü a derecedir.

Açının birimi ne olursa olsun, esas ölçü negatif yönlü olamaz. Diğer bir ifadeyle esas ölçü $[0^\circ, 360^\circ)$ aralığındadır.

Derece cinsinden verilen pozitif açılarda, açı 360° ye bölünür. Elde edilen kalan esas ölçüdür.

Derece cinsinden verilen negatif yönlü açılarda, açının mutlak değeri 360° ye bölünür; kalan 360° den çıkarılarak esas ölçü bulunur.

Radyan cinsinden verilen açılarda açının içerisinde 2π nin katları atılır. Geriye kalan esas ölçüdür.

Radyan cinsinden verilen negatif yönlü açılarda esas ölçüsü bulunurken, verilen açı pozitif yönlü açı gibi düşünülerek esas ölçü bulunur. Bulunan değer 2π den çıkarılır.

$$\frac{a \cdot \pi}{b}$$

b nin esas ölçüsü aşağıdaki yolla da bulunabilir. a sayısı b nin 2 katına bölünür. Kalan π nin kat sayısı olarak payaya yazılır payda aynen yazılır.

a nın b nin 2 katına bölümünden kalan k ise nin esas ölçüsü $\frac{a \cdot \pi}{b}$ dir.

TRİGONOMETRİK FONKSİYONLAR

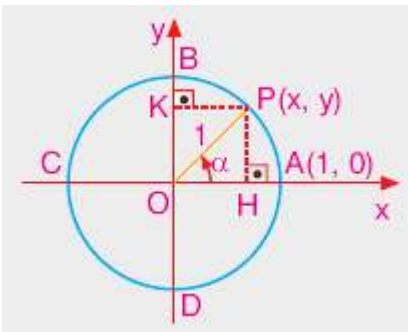
A. KOSİNÜS FONKSİYONU

Bir x reel sayısını $\cos x$ e dönüştüren fonksiyona kosinüs fonksiyonu denir.

$$f : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$$

$$f(x) = \cos x \text{ olur.}$$

Birim çember üzerinde P(x, y) noktası ile eşlenen açı \widehat{AOP} olmak üzere, P noktasının apsisine, a reel (gerçel) sayısının kosinüsü denir ve $\cos a$ ile gösterilir.



$$x = \cos a \text{ dir.}$$

Kosinüs fonksiyonunun görüntü kümesi (aralığı), $[-1, 1]$ dir. Yani, her $\alpha \in \mathbb{R}$ için,

$$-1 \leq \cos a \leq 1 \text{ dir.}$$

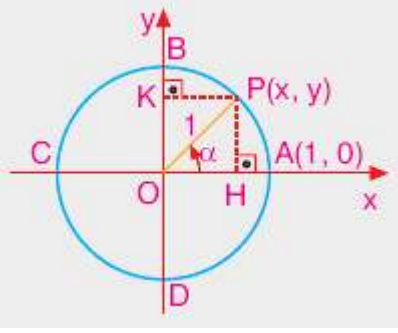
B. SİNÜS FONKSİYONU

$$f : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$$

$$f(x) = \sin x \text{ olur.}$$

Bir x reel sayısını $\sin x$ e dönüştüren fonksiyona sinüs fonksiyonu denir.

Birim çember üzerinde $P(x, y)$ noktası ile eşlenen açı $m(\widehat{AOP}) = \alpha$ olsun. P noktasının ordinatına, a reel (gerçel) sayısının sinüsü denir ve $\sin a$ ile gösterilir.



$$y = \sin a$$

Sinüs fonksiyonunun görüntü kümesi (aralığı), $[-1, 1]$ dir. Yani, her $\alpha \in \mathbb{R}$ için,

$$-1 \leq \sin a \leq 1 \text{ dir.}$$

SONUÇ

Şekilde,

$A(1, 0)$ olduğundan, $\cos 0^\circ = 1$ ve $\sin 0^\circ = 0$ dir.

$B(0, 1)$ olduğundan, $\cos 90^\circ = 0$ ve $\sin 90^\circ = 1$ dir.

$C(-1, 0)$ olduğundan, $\cos 180^\circ = -1$ ve $\sin 180^\circ = 0$ dir.

$D(0, -1)$ olduğundan, $\cos 270^\circ = 0$ ve $\sin 270^\circ = -1$ dir.

KURAL

Şekilde,

$$x = \cos a, y = \sin a$$

$$|OK| = \sin a \text{ ve}$$

$|OH| = \cos a$ olduğuna göre, OHP dik üçgeninde;

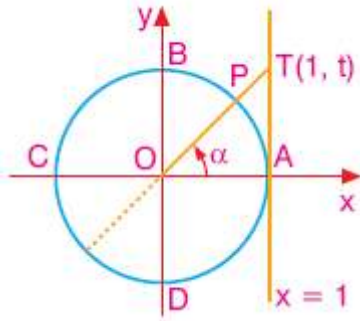
$$|OH|^2 + |PH|^2 = 1^2$$

$$\cos^2 a + \sin^2 a = 1 \text{ dir.}$$

C. TANJANT FONKSİYONU

Birim çember üzerinde P(x, y) noktası ile eşlenen açı $m(\widehat{AOP}) = \alpha$ olsun. [OP'nin x = 1 doğrusunu kestiği T noktasının ordinatına, a reel (gerçel) sayısının tanjantı denir ve tana ile gösterilir.

x = 1 doğrusuna tanjant ekseni denir.

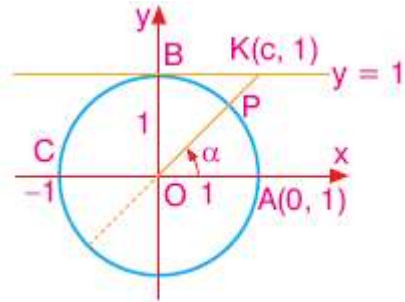


t = tana dır.

D. KOTANJANT FONKSİYONU

Birim çember üzerinde P(x, y) noktası ile eşlenen açı $m(\widehat{AOP}) = \alpha$ olsun. [OP'nin y = 1 doğrusunu kestiği K noktasının apsisine, a reel (gerçel) sayısının kotanjantı denir ve cota ile gösterilir.

y = 1 doğrusuna kotanjant ekseni denir.

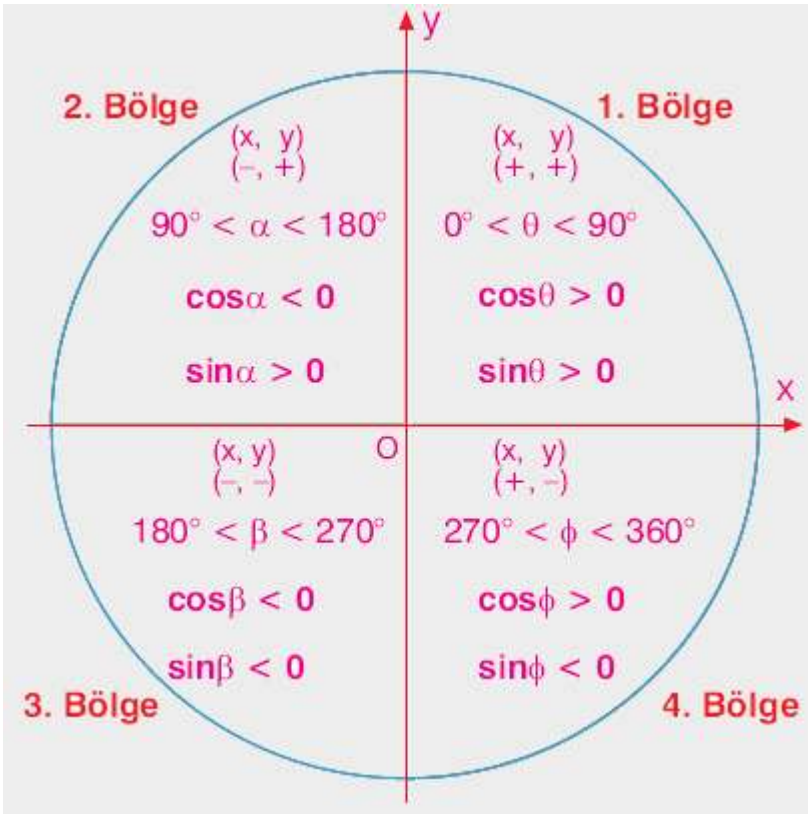


c = cota

Sonuç

✓ Her $\alpha \in \mathbb{R}$ için,
 $-\infty < \tan \alpha < \infty$ ve $-\infty < \cot \alpha < \infty$ dir..

Koordinat Sisteminde, Birim Çemberdeki Dört Bölgeye Göre Kosinüs ve Sinüs Fonksiyonlarının İşaretleri



Kural

- ✓ $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$
- ✓ $\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$
- ✓ $\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1$

Uyarı

cosa'nın işaretinin sina'nın işaretine bölümü cota'nın işaretini; sina'nın işaretinin cosa'nın işaretine bölümü tana'nın işaretini verir.

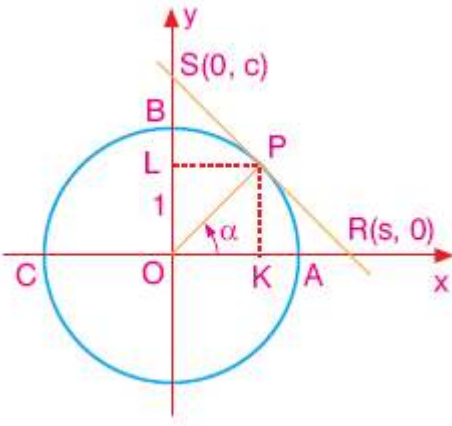
4 bölgede de tana ile cota'nın işareti aynıdır.

E. KOSEKANT, SEKANT FONKSİYONU

Birim çember üzerinde $m(\widehat{AOP}) = \alpha$ olmak üzere,

P noktasındaki teğetin y eksenini kestiği noktanın ordinatına, a reel (gerçel) sayısının kosekanti denir ve csc a ile ya da coseca gösterilir.

P noktasındaki teğetin x eksenini kestiği noktanın apsisine, a reel (gerçel) sayısının sekanti denir ve seca ile gösterilir.



$$c = \operatorname{cosec} \alpha$$

$$s = \sec \alpha$$

Kural

$$\checkmark \operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\sin \alpha}$$

$$\checkmark \sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}$$

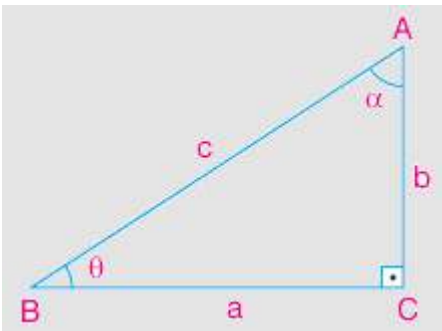
Sonuç

$\operatorname{cosec} x$ ve $\sec x$ in sonucu $(-1, 1)$ aralığındaki sayılara eşit olamaz.

$$1 + \tan^2 x = \sec^2 x$$

$$1 + \cot^2 x = \operatorname{cosec}^2 x$$

F. DİK ÜÇGENDE DAR AÇILARIN TRİGONOMETRİK ORANLARI



BCA dik üçgeninde, aşağıdaki eşitlikleri yazabiliriz.

$$\cos \theta = \frac{\text{Komşu dik kenarın uzunluğu}}{\text{Hipotenüsün uzunluğu}} = \frac{a}{c}$$

$$\sin \theta = \frac{\text{Karşı dik kenarın uzunluğu}}{\text{Hipotenüsün uzunluğu}} = \frac{b}{c}$$

$$\tan \theta = \frac{\text{Karşı dik kenarın uzunluğu}}{\text{Komşu dik kenarın uzunluğu}} = \frac{b}{a}$$

$$\cot \theta = \frac{\text{Komşu dik kenarın uzunluğu}}{\text{Karşı dik kenarın uzunluğu}} = \frac{a}{b}$$

Sonuç

Ölçüleri toplamı 90° olan (tümler) iki açıdan birinin sinüsü, diğerinin kosinüsüne; birinin tanjantı, diğerinin kotanjantına; birinin sekanti, diğerinin kosekantına eşittir. Buna göre,

- ✓ $\alpha + \theta = 90^\circ$ ise $\sin \alpha = \cos \theta$
- ✓ $\alpha + \theta = 90^\circ$ ise $\tan \alpha = \cot \theta$
- ✓ $\alpha + \theta = 90^\circ$ ise $\sec \alpha = \operatorname{cosec} \theta$ dir.

Bazı dar açıların trigonometrik değerleri aşağıda verilmiştir. Bu değerlerin çok iyi bilinmesi soruları daha hızlı çözmenizi sağlar.

	0°	30°	45°	60°	90°
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tan	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	Tanımsız

Kural

$\cos(180^\circ \pm x)$, $\sin(180^\circ \pm x)$, $\tan(180^\circ \pm x)$,
 $\cot(180^\circ \pm x)$, $\cos(360^\circ \pm x)$, $\sin(360^\circ \pm x)$,
 $\tan(360^\circ \pm x)$, $\cot(360^\circ \pm x)$ in özdeşi bulunurken,

x açısı; dar açı olarak kabul edilmek üzere, trigonometrik değerlerin hangi bölgede olduğu bulunur. Daha sonra, fonksiyonun o bölgedeki işareti belirlenir. Eşitliğin iki tarafında fonksiyonların adı aynı olur.

Kural

$\cos(90^\circ \pm x)$, $\sin(90^\circ \pm x)$, $\tan(90^\circ \pm x)$, $\cot(90^\circ \pm x)$

$\cos(270^\circ \pm x)$, $\sin(270^\circ \pm x)$, $\tan(270^\circ \pm x)$,

$\cot(270^\circ \pm x)$ in özdeşi bulunurken,

x açısı; dar açı olarak kabul edilmek üzere, trigonometrik değerler hangi bölgede olduğu bulunur. Daha sonra, fonksiyonun o bölgedeki işareti belirlenir. Eşitliğin iki tarafında fonksiyonların adı farklı olur. Bu farklılık, sinüs için kosinüs, kosinüs için sinüs, tanjant için kotanjant, kotanjant için de tanjanttır.

Kural

✓ $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos \theta$

✓ $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin \theta$

✓ $\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cot \theta$

✓ $\cot\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \tan \theta$

✓ $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \cos \theta$

✓ $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\sin \theta$